UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Funkce v příkladech a protipříkladech

Functions in examples and counterexamples

Autor: David Janda

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous

Praha 2011

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Derka Pilouse. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 23. června 2011 . . . .

David Janda

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Derkovi Pilousovi, za projevenou ochotu a mnoho cenných rad a připomínek, které mi pomohly realizovat tuto práci.

Abstrakt

Cílem mé bakalářské práce je přiblížit studentům přicházejícím na vysokou školu problematiku základů matematické analýzy, přičemž se zaměřuji na významné pojmy spojitosti a limity, které sice znají studenti právě ze středních škol, nicméně většinou pouze intuitivně a neformálně. Snažím se poukázat na to, že mnoho studentů si přináší poznatky zkreslené a neúplné. Je tedy nutné tyto poznatky dále procvičovat a ujasňovat, aby intuitivní představa studentů odpovídala formální definici. Tohoto stavu se pokouším docílit pomocí rozbití intuitivních představ studentů použitím protipříkladů. Významná je z tohoto hlediska kapitola Konstrukce funkcí, která obsahuje návod vedoucí k nalezení funkcí určitých vlastností, a to nejen těch, které jsou popisovány v této práci, ale i mnohých složitějších, neboť princip příkladů vhodných k procvičování například pojmů derivace, primitivní funkce či stejnoměrné konvergence, je v mnoha ohledech podobný. V kapitolách Spojitost a Limita potom prezentuji vlastnosti spojitost a limitu na příkladech funkcí, které jsou dle mého názoru vhodné pro procvičování těchto pojmů. Mým záměrem je tedy pomoci objasnit vybrané problematické partie matematické analýzy.

Abstract

The aim of my Bachelors thesis is to explicate students coming to the university the key problems in fundamentals of mathematical analysis. I focus on the most notable terms of continuity and limit, which these secondary students were acquainted with. However, majority of them just intuitively and informaly. I am trying to point out the fact, that the knowledge of many students is distortid and uncomplete. As a result it is necessary to practise and clarify this knowledge so that the intuitive imagination of these terms corresponds to the formal definition. I am trying to get this point by breaking of intuitive imaginations of students by counterexamples. Important is a chapter named The Construction of Functions, which contains instructions leading to the finding functions with specific features. Not only these features, described in this thesis, but also more complex such as derivation, primitive function or uniform convergence. It is a consequence of the fact, that the principle of examples to practise these terms is in many sights similar and repetitious. In chapters named Continuity and Limit, I am interpreting these terms using the special examples, which are in my opinion optimal for rehearsing. My intention is to help illustrate selected problematical sections of mathematical analysis.

Obsah

Úvod

Motivace

Důvodem, který mne motivoval k napsání práce na téma funkce v příkladech a protipříkladech, je přiblížit studentům matematiky část matematické analýzy, zabývající se reálnými funkcemi jedné reálné proměnné. Většinou se jedná o lokální a množinové vlastnosti těchto funkcí. Toto téma jsem si zvolil na základě zkušeností vlastních i mých kolegů, které jednoznačně říkají, že porozumnění této problematice při příchodu na vysokou školu je velmi obtížné. K tomu dochází především proto, že studenti po ukončení střední školy nejsou připraveni na přesnou práci s definicemi, větami a jejich předpoklady. Příčiny tohoto stavu jsou, dle mého názoru, dvě.

První z nich je snaha přiřadit každému pojmu konkrétní reálnou představu. Tato schopnost je bezesporu velice potřebná v každé oblasti matematiky. Ať už v syntetické geometrii, kde se rozvíjí její geometrická interpretace, nebo algebře, kde jde o představy velice abstraktní. Neméně důležitá je představivost i v matematické analýze, ovšem tím, jak se člověk zdokonaluje v tomto směru, postupně zjišťuje, že konkrétní představa je nedokonalá a je schopen konstruovat protipříklady, které tuto představu rozbíjí. Proto je nutné si uvědomit, že může nastat situace, kdy nám snaha přiřadit každému pojmu nějakou konkrétní představu, může bránit v hlubším porozumění tomuto pojmu.

Z konkrétních vlastností funkcí se v této práci zabývám především spojitostí a limitou v bodě, případně na množině, jelikož se jedná o pojmy elementární a velice důležité. Každý student si tyto vlastnosti, po prvním seznámení s formální definicí, dokáže představit. Ale již následujícím příkladem rozbouráme představu většiny o pojmu spojitosti.

Příklad. Existuje funkce nespojitá v každém bodě $\mathbb{R}$?

Řešení. Příkladem takové funkce je funkce Dirichletova (v dalším textu ji budeme značit $D(x)$). Ta je definována tak, že každému racionálnímu číslu přiřadí hodnotu 1 a každému iracionálnímu číslu hodnotu 0. Přestože je definována pro všechna reálná čísla, v žádném bodě není spojitá. Toto lze dokázat pomocí vybraných podposloupností pro racionální a iracionální body (jejich limity jsou různé), případně pomocí okolí těchto bodů. Tuto úlohu v mé práci naleznete pod příkladem 16.

Řada příkladů z přednášek o matematické analýze je proto věnována právě snaze zpřesnit intuitivní chápání formálních definic konkrétních pojmů. Doufám, že svou prací alespoň drobně přispěji k této nelehké činnosti vyučujících a přednášejících.

Druhou příčinou, která znesnadňuje studium v oblasti matematické analýzy, je snaha řešení veškerých úloh a problémů algoritmizovat. Tento silný návyk, který si studenti přinášejí ze základních a středních škol, je zde vyučujícími většinou preferován, jelikož je to nejsnazší způsob, jak naučit žáky řešit zadané úkoly. To je samozřejmě důsledkem dnes obecně požadovaného vykazování měřitelných výsledků práce. Toto by ale v oblasti výuky neměl být prioritní směr. Jako je v písemných pracích z matematiky preferován postup vedoucí k výsledku před výsledkem samotným, tak i schopnost kreativně vymýšlet postupy vedoucí k řešení úkolu, by měla být upřednostňována před mechanickým řešením podle daného algoritmu. Samozřejmě tyto algoritmy jsou velmi silnou studijní pomůckou[1], ale hlavním cílem výuky by nemělo být naučit se nějaký algoritmus používat (i přesto, že to je důležité), ale schopnost vlastní algoritmus vedoucí k řešení sestavit, neboť tato schopnost má velké uplatnění i v reálném životě. Tímto problémem se zabývá kapitola

[1] například u derivování funkcí či vyšetřování průběhu funkce

Konstrukce funkcí, která právě takovou konstrukci algoritmů, které vedou k nalezení funkce nějaké vlastnosti, ukazuje.

Většina sbírek svým charakterem algoritmizaci řešení úloh silně podporuje (např. úlohy typu vyšetřete průběh funkce, nalezněte definiční obor funkce,...). V učebnicích se častěji vyskytují úlohy, které této algoritmizaci vzdorují. Je toho však dosaženo tím, že se zadá ke zkoumání nějaký obtížnější objekt. Základní struktura úlohy, tedy „Zjistěte vlastnosti objektu“, zůstává stále stejná. Příkladem takové úlohy, která je častou pomůckou pro výuku matematické analýzy a na níž chci prezentovat svou další myšlenku, je úloha následující:

Příklad. Zjistěte body spojitosti a klasifikujte body nespojitosti

1. **Dirichletovy funkce;**
2. **Riemannovy funkce.**[VÚZMA]

Příklady, které se objevují v následujících kapitolách, se od těchto příkladů na ověřování vlastností zásadně liší. V mé práci se snažím formulovat úlohy tak, aby funkce nebyla součástí zadání, aby student musel konkrétní funkci hledat, což je obecně těžší, ale také přínosnější. Z tohoto důvodu je podle mého názoru, důležité zahrnout do procvičování matematické analýzy oba typy formulací úkolů, neboť jejich kombinací je možno dosáhnout větší efektivity výuky. A to z toho důvodu, že každému studentovi vyhovuje více jedna či druhá.

Posledním důvodem, který mne motivoval k tvorbě této práce je fakt, že schopnost konstruovat funkce s netypickými, okrajovými či jenom zajímavými vlastnostmi je extrémně důležitá pro povolání učitele. A to z důvodu, že obecně na každou hypotézu, kterou student vysloví, je nutno reagovat buď souhlasně nebo zdůvodněním, proč tato hypotéza neplatí. To se v drtivé většině případů řeší nalezením protipříkladu, který tuto hypotézu vyvrátí. Pro člověka, který usměrňuje myšlení skupiny lidí tím správným směrem, jsou tedy takovéto úlohy mimořádně důležité.

Kapitola 1

Konstrukce funkcí

1.1 Rozdělení vlastností

Na rozdíl od příkladů uvedených v úvodní kapitole, budou v této práci hojně obsaženy ty příklady, které budou požadovat konstrukci funkce mající nějaké specifické vlastnosti. Jak jsem již naznačil v úvodní kapitole, schopnost takové funkce konstruovat je z pohledu didaktického nadřazena schopnosti ověřovat, zda konkrétní funkce tyto vlastnosti má. Proto bych zde rád uvedl konstrukci postupu, který nám při hledání takových funkcí může pomoci. V první řadě si ale definujme samotný pojem funkce, bez něhož se dále neobejdeme.

Definice 1. Zobrazení libovolné neprázdné množiny do číselného oboru nazvěme funkcí. Reálnou funkcí chápejme zobrazení do množiny reálných čísel ($\mathbb{R}$). Funkci reálné proměnné definujme jako funkci, jejímž definičním oborem je podmnožina $\mathbb{R}$.[DI]

Úmluva. Pojmem funkce budeme v této práci obecně rozumnět reálnou funkci jedné reálné proměnné pokud nebude řečeno jinak.[DI]

Poznámka. V této kapitole jsou v textu na několika místech použity pojmy spojitost a limita funkce i přesto, že zde zatím nejsou definovány. Je to z toho důvodu, že je zde potřeba pouze intuitivní představa těchto pojmů. Formální definice je možno nahlédnout v příslušných kapitolách, ovšem jejich zařazení na toto místo by spíše znepřehlednilo systém, kterým je tato práce vystavěna.

Při konstrukci funkce s nějakými vlastnostmi je nejprve nutné uvědomit si, v jaké podmnožině reálných čísel nás funkce zajímá. Podle tohoto kritéria můžeme vlastnosti funkcí rozdělit do tří kategorií.

1. **Bodové.** V bodě nebo konečně mnoha bodech bez znalosti chování na jejich okolí můžeme zkoumat pouze elementární vlastnosti, například srovnání s konstantou (kladná, záporná funkce) nebo definovanost funkce.

2. **Lokální.** Do této kategorie patří monotonie v bodě, spojitost v bodě, limita, derivace, hladkost funkce, spojitost derivace n-tého řádu či lokálně stejnoměrná konvergence.

3. **Množinové.** Tyto vlastnosti se dají intuitivně rozdělit do dvou skupin.

   - **Lokální na množině.** Neboli takové, které můžeme zkoumat v každém bodě této množiny. Patří sem všechny vlastnosti zmíněné v kategorii výše a platí, že funkce danou vlastnost na množině má, pokud tuto vlastnost má v každém bodě této množiny.

   - **Vlastní na množině.** Tedy vlastnosti, u kterých je nutné posuzovat chování funkce na množině jako celek, abychom mohli rozhodnout zda je funkce na té množině má, nebo nemá. Takové vlastnosti jsou například omezenost, monotonie, nebo periodicita. Dále lze zkoumat, zda je funkce na množině prostá, konvexní, konkávní, zda má na této množině nějaký extrém, Darbouxovu vlastnost či primitivní funkci.

   Typickou podmnožinou, na které tyto vlastnosti zkoumáme, je interval, ale můžeme například ověřovat vlastnosti pro celá či racionální čísla.

Poznámka. Z rozdělení výše vyplývá, že některé vlastnosti může mít funkce i mimo svůj definiční obor. Ukažme si tuto skutečnost na funkci $|\mathrm{tg}(x)|$. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} |\mathrm{tg}(x)|$ existuje a je rovna nekonečnu. Podstatné ovšem je, že zkoumáme zda má funkce $|\mathrm{tg}(x)|$ limitu v bodě $\frac{\pi}{2}$, který je mimo definiční obor této funkce. Takovéto vyšetřování má ale smysl pouze pro takzvané hraniční body[1] množiny, na které je funkce definována. To proto, že pokud v takových bodech zkoumáme nějakou lokální vlastnost funkce, zkoumáme, jak se ona funkce chová na nějakém okolí tohoto bodu. A toto okolí má již z definice hraničního bodu neprázdný průnik s definičním oborem zkoumané funkce, proto je v něm ukryta i určitá informace o zadané funkci. Speciálními hraničními body mohou být body nevlastní. V těchto bodech můžeme vyšetřovat vlastnosti lokální, neboť platí, že funkce má danou vlastnost v $\pm\infty$, pokud existuje libovolně malý interval právě $\pm\infty$, na kterém funkce onu vlastnost má.

1.2 Předpisy funkcí

Představme si nyní zadání úlohy: "Nalezněte funkci, která má na svém definičním oboru vlastnosti $A_1, ..., A_n$". Takovéto zadání se dá splnit mnoha způsoby, a to z toho důvodu, že funkce můžeme popisovat různě. Například slovním popisem, předpisem, implicitně, funkcionální rovnicí, tabulkou či dokonce grafem. Každé z těchto vyjádření je možné a každé má své, jak matematické, tak i didaktické, výhody i nevýhody. Z hlediska této práce jsou pro nás nejdůležitější funkce zapisované předpisem, což znamená, že funkci popisujeme pomocí již definovaných funkcí a definovaných operací. Popis předpisem můžeme rozdělit podle tvaru zápisu na dvě skupiny. Předpisy ve formě vzorce (dále budu pracovat s termínem „funkce zadané vzorcem“), které známe a běžně používáme, a předpisy takzvaně „po částech“, zapisované takto:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1, \\ f_2(x), & x \in I_2, \\ ... \\ f_n(x), & x \in I_n. \end{cases}$$

[1]Hraniční bod množiny $M \in \mathbb{R}$ je takový bod, pro jehož všechna okolí platí, jejich průniky s M i s $\mathbb{R} \setminus M$ jsou neprázdné

Příkladem předpisu „po částech“ je Dirichletova funkce, kterou jsem zmínil již v úvodní kapitole a se kterou budeme ještě mnohokrát pracovat. Tento předpis je používán zejména v případech, kdy není možno funkci popsat přímo explicitně. Mnoho funkcí z následujících kapitol by se poměrně snadno dalo právě takto konstruovat, ale jeho užití je pro naše účely vesměs nevhodné, a to hned z několika důvodů, které zmiňuji dále. Proto budeme takovýchto funkcí používat pouze několik vybraných, které jsou svým významem důležité.

1.2.1 Elementární funkce

Jako elementární funkce označujeme ty algebraické funkce, jejichž předpis lze získat konečným počtem operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání z funkcí konstantních, mocniných, exponenciálních, logaritmických, goniometrických a cyklometrických.

Poznámka. Množinu funkcí, kterou generuje obecná množina funkcí G, za pomoci výše uvedených operací, budeme značit $\langle G \rangle$.Toto značení je převzato z algebry, kde se užívá pro lineární obal množiny. Konkrétně tedy množinu elementárních funkcí můžeme zapsat jako $\langle G_e \rangle$, s tím, kde G_e je množina funkcí vypsaných v definici elementárních funkcí výše.

Elementární funkce jsou pro tuto práci důležité z několika důvodů.

- Tyto funkce byly zkonstruovány významnými matematiky v průběhu staletí a jsou podloženy formálními definicemi a konstrukcemi. Jako jeden z důvodů, proč tomu tak je, můžeme uvést fakt, že se v nich mnohdy spojuje reálný svět se světem matematiky.

- Druhý důvod, vyplývající z prvního je ten, že tyto funkce jsou známy a používány nejen studenty matematiky, ale i jiných přírodovědných a technických oborů. Je proto nasnadě, že právě těmito funkcemi je nutno se zabývat a zpřesňovat a procvičovat představu, kterou si o nich studenti utváří.

- Další důvod je didaktický. Vyšetřování předpisů elementárních funkcí je podstatně náročnější, než například výše zmíněného předpisu „po částech“, protože samotné části funkcí, pomocí kterých je definována ta výsledná, už dávají nějakou informaci o jejích vlastnostech. Zde tedy přibývá jeden krok řešení navíc, a to rozložit si zadanou funkci na ty části, ze kterých je možno již vyčíst ony informace.

- Posledním důvodem je pohled z hlediska matematické estetiky, kde zpravidla vítězí nejstručnější a nejvýstižnější popis nějakého objektu, tedy i funkce. Toto samozřejmě plyne z předchozích, jelikož jsou to funkce důležité, používané, tedy i svým zápisem zjednodušené co nejvíce.

Poznámka. Množinu elementárních funkcí spojuje několik vlastností. Já zde zmíním pouze jednu, která je pro tuto práci důležitá. Je-li funkce nespojitá na svém definičním oboru, není elementární. Toto tvrzení může být pro některé studenty netriviální, ovšem je možné ho zpřesnit takto: Pokud nalezneme bod nespojitosti elementární funkce vzhledem k reálným číslům, tento bod neleží v definičním oboru funkce. Z tohoto faktu plyne následující věta.

Věta 1. *Elementární funkce definovaná pro všechna reálná čísla nabývá jedné nebo nekonečně mnoha hodnot.*

Důkaz. Nechť je funkce spojitá a nabývá právě dvou hodnot. Potom musí nabývat i hodnot mezi těmito dvěmi nebo mezi nimi není definována. □

Poznámka. Je důležité zmínit, že jsou i funkce, které zdánlivě mezi elementární nepatří, ovšem pokud se na ně podíváme blíže, ukáže se, že se pomocí uvedených transformací a množiny G_e dají popsat. Příkladem mohou být:

$$|x| = \sqrt{x^2},$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Příklad 1. Nalezněte elementární funkci, která nabývá právě dvou hodnot.

Řešení. Pokud bychom si měli představit libovolnou funkci, která je nejblíže té hledané, jistě nás napadne funkce signum. Ta nabývá právě tří hodnot pro všechna reálná čísla. Ze tří hodnot lehce získáme právě dvě, pokud z definičního oboru vyřadíme 0. Tedy si položme otázku: je možné popsat funkci signum pomocí nějaké elementární funkce s tím, že vynecháme z definičního oboru 0? Funkce signum reprezentuje znaménko reálného čísla. To můžeme zjistit, pokud absolutní hodnotu čísla vydělíme samotnou hodnotou čísla, tedy $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Pokud se podíváme na tuto funkci blíže, zjistíme, že jsme už samotnou konstrukcí odstranili problém s 0, jelikož tato funkce v 0 není definována. Funkce tedy vyhovuje zadání. Poznamenejme ještě, že jsme použili podíl dvou elementárních funkcí.

Poznámka. Jak vyplývá z věty 1, není možné aby tato funkce byla definována na celém $\mathbb{R}$.

1.2.2 „Předpisové“ funkce

Důvody vyjádření níže definovaných funkcí předpisových jsou stejné jako u funkcí elementárních, několik jich je zde ovšem navíc.

- Z didaktického hlediska by nebylo vhodné omezit se pouze na množinu elementárních funkcí a to ze dvou důvodů. Za prvé, pokud chceme přiblížit pojmy spojitosti a limity studentům, je zde mnoho příkladů, které přímo vyžadují použití nespojitých funkcí ve svém řešení a jsou velice názorné právě v tom smyslu, že nesplňují intuitivní představu studenta o dané vlastnosti. Při tom na množině elementárních funkcí by je buď nebylo možné zkonstruovat a nebo by byly natolik složité, že by jejich použití k výuce postrádalo smysl.

- Pomocí takovýchto funkcí je možno v matematických softwarech vyjádřit funkce, které bychom jinak zapsat nemohli. Jsou to právě funkce definované „po částech“. Tedy pokud se naučíme používat signum v zápisu funkcí, získáme tím užitečný prostředek při používání matematického softwaru. Tímto způsobem byly získány i některé grafy funkcí použité v této práci.

- Posledním důvodem je zde fakt, že na středních školách se obecně téměř vůbec nepracuje s nespojitými funkcemi (ve smyslu nespojitosti v definičním oboru) a proto je nutné studenty včas upozornit, že celou střední školu se vlastně zabývali jenom malou částí množiny všech funkcí. Z těchto důvodů rozšíříme G_e o několik dalších funkcí, které doufám pomohou stejně tak rozšířit rozhled studentů věnujících se této části matematiky.

Množina nespojitých funkcí je z hlediska teorie množin exponenciálně větší než množina funkcí spojitých. Jak jsem ale zdůvodnil výše, my se v této práci omezíme pouze na ty, které jsou z didaktického hlediska přínosné svými vlastnostmi. Nespojité funkce se vyznačují tím, že je nelze zapsat pomocí funkcí elementárních. Proto jsou zpravidla definovány méně tradičním způsobem. Dále definuji ty, o které je pro určité příklady vhodné rozšířit množinu generátorů elementárních funkcí G_e tak, aby množina funkcí, kterou budou generovat, byla pro výuku pojmů spojitosti a limity postačující, ale zároveň tak, aby nebyla příliš rozsáhlá a neobsahovala funkce, které z hlediska zmiňovaných vlastností nemají tak podstatný význam.

- **Signum.** Signum je funkce, která charakterizuje znaménko čísla. Pro všechna kladná čísla je jeho hodnota 1, pro záporná má hodnotu -1 a pro nulu je hodnota 0. Značí se $\operatorname{sgn}(x)$. Signum je z hlediska spojitosti velmi důležitá funkce, neboť s její pomocí je možno konstruovat například funkce nespojité ve spočetně mnoha bodech. Množinu generátorů elementárních funkcí rozšířenou o funkci signum budeme dále značit G_e^S.

- **Charakteristická funkce.** Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina. Definujeme $\chi_A(x) = 1$ pro všechna $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Takovouto funkci nazveme funkcí charakteristickou pro množinu A. Pokud rozšíříme množinu generátorů o funkci charakteristickou, budeme ji označovat G_e^{χ}. Toto rozšíření ovšem není pro naše účely prioritní, neboť potom tato množina generuje celou množinu funkcí.

- **Dirichletova funkce.** Dirichletova funkce je charakteristická funkce pro množinu $\mathbb{Q}$, tedy všem racionálním číslům přiřadí 1 a všem iracionálním přiřadí 0. V dalším textu ji budeme značit $D(x)$. Je zde zmíněna zvlášť z toho důvodu, že je pro pojmy spojitosti a limity extrémně důležitá a dále pomocí ní budeme konstruovat mnohé zajímavé příklady. Je tedy vhodné o ni případně rozšířit G_e, dále tuto nově vzniklou množinu generátorů budeme značit G_e^D

Poznámka. Je zřejmé, že všechny výše uvedené funkce se dají zapsat pomocí předpisu „po částech".

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty; 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0; \infty), \end{cases}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dirichletova funkce, jako speciální případ funkce charakteristické je popisována stejně, s tím, že za A dosadíme množinu racionálních čísel.

Poznámka. Podotkněme, že ani jedna z výše uvedených funkcí zcela jistě nepatří mezi funkce elementární, a to podle věty 1.

Zdaleka nejdůležitější nespojitou funkcí v této práci je funkce signum. S její pomocí budeme konstruovat příklady funkcí napříč všemi kapitolami. Je tedy vhodné množinu $\langle G_e^S \rangle$ pojmenovat.

Definice 2. Množinu funkcí, kterou generuje rozšířená množina generátorů G_e^S s původními transformacemi nazveme množinou funkcí předpisovými a značíme $\langle G_e^S \rangle$.

Příklad 2. Nalezněte předpisovou funkci, která nabývá právě dvou hodnot a je definovaná na celém $\mathbb{R}$.

Řešení. Této redukce oboru hodnot lze dosáhnout tím, že hodnotu v bodě 0 posuneme buď do hodnoty pro kladná nebo záporná čísla. Funkce $\operatorname{sgn}(x) + 1$ nabývá pro záporná čísla hodnoty 0, pro nulu hodnoty 1 a pro kladná čísla hodnoty 2. Pokud tuto funkci vynásobíme původním signem, všechna záporná čísla i s 0 se zobrazí na 0 a kladná na 2. Tím jsme zjistili předpis hledané funkce, tedy $f(x) = \operatorname{sgn}(x)(\operatorname{sgn}(x) + 1)$.

Tento příklad, ač to na první pohled není zřejmé, má značný význam. Pokud totiž $\operatorname{sgn}(x)(\operatorname{sgn}(x) + 1)$ vydělíme 2, dostáváme funkci, která pro kladná čísla nabývá 1 a pro záporná s nulou nabývá 0. Takto je definována výše zmíněná charakteristická funkce, v tomto případě konkrétně množiny $\mathbb{R}^+$. Analogicky můžeme vytvořit charakteristické funkce oborů zápornosti, nekladnosti a nezápornosti. Shrňme si tedy všechny tyto předpisy:

$$\begin{aligned}
\chi_{R^+}(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1),\\
\chi_{R^-}(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}(\operatorname{sgn}(x) - 1) = \chi_{R^+}(-x),\\
\chi_{R_0^-}(x) &= \frac{2 - \operatorname{sgn}(x)}{2}(\operatorname{sgn}(x) + 1) = 1 - \chi_{R^+}(x),\\
\chi_{R_0^+}(x) &= \frac{2 - \operatorname{sgn}(x)}{2}(\operatorname{sgn}(x) - 1) = 1 - \chi_{R^-}(x).
\end{aligned}$$

Z takto definovaný funkcí plyne, že například interval $(x_0; \infty)$, lze charakterizovat těmito funkcemi jako

$$\chi_{(x_0;\infty)}(x) = \chi_{R^+}(x - x_0), x \in \mathbb{R}.$$

Tato funkce nabývá hodnoty 0 pro všechna $x \leq x_0$ a 1 pro všechna $x > x_0$. Podobně můžeme sestrojit charakteristickou funkci pro interval $(-\infty; x_0)$:

$$\chi_{(-\infty;x_0)}(x) = \chi_{R^-}(x - x_0), x \in \mathbb{R}.$$

Analogicky lze sestrojit charakteristické funkce intervalů $(-\infty; x_0]$ a $[x_0; \infty)$. Libovolný interval lze zapsat jako průnik těchto čtyřech intervalů. A jelikož průnik charakteristických funkcí intervalů je součin těchto charakteristických funkcí, lze sestrojit i charakteristická funkce tohoto libovolného intervalu. Tedy například interval $(a; b]$ lze zapsat takto:

$$\chi_{(a;b]} = \chi_{(a;\infty)}\chi_{(-\infty;b]}.$$

Pokud konstruujeme funkci, která má být na intervalu I rovna f_1 a všude jinde 0, stačí tuto funkci vynásobit charakteristickou funkcí intervalu I. Tedy libovolnou funkci předepsanou „po částech" v tomto tvaru

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1, \\ f_2(x), & x \in I_2, \\ ... \\ f_n(x), & x \in I_n \end{cases}$$

je možné zapsat takto:

$$f(x) = f_1\chi_{I_1} + f_2\chi_{I_2} + ... + f_n\chi_{I_n}.$$

Poznámka. Takto definovaná funkce f je definovaná na celém $\mathbb{R}$. Pokud bychom chtěli funkci definovanou pouze na sjednocení intervalů $I_1, ..., I_n$, stačí ji vydělit charakteristickou funkcí tohoto sjednocení.

Příklad 3. Nalezněte předpisovou funkci, která nabývá právě $n > 2, n \in \mathbb{N}$ hodnot a je definována na celém $\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $n = 2$ je takovou funkcí výše uvedená $f(x) = \chi_{R^+}(x)$, jelikož vybíráme z předpisových funkcí. Tuto můžeme nadále použít jako základ, ze kterého odvodíme funkce pro $n \geq 3$ a to tak, že funkci signum posuneme ve směru osy x o 1. Vznikne nám $\chi_{R^+}(x-1)$. Pokud tuto funkci přičteme k původním $\chi_{R^+}(x)$, dostáváme $\chi_{R^+}(x) + \chi_{R^+}(x-1)$. Z definice funkce χ_{R^+} je vidět, že tato funkce nabývá právě 3 hodnot. Tedy součtem $n-1$ funkcí χ_{R^+} posunutých vždy o 1 ve směru osy x dostáváme:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \chi_{R^+}(x-i),$$

která již splňuje naše požadavky.

Poznámka. Pokud bychom zadání formulovali bez podmínky, že funkce musí být definována na celém $\mathbb{R}$, bylo by možné ji sestrojit dokonce pouze s použitím elementárních funkcí (nejlépe s pomocí příkladu 1). Avšak s touto podmínkou je zapotřebí konstrukce s pomocí předpisových funkcí.

Ukažme si nyní jeden náročnější příklad, ve kterém hledáme předpis obecně známé nespojité funkce.

Příklad 4. Nalezněte předpisovou funkci shodnou s funkcí dolní celá část.

Definice 3. Funkce dolní celá část přiřadí každému reálnému x největší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x, značíme ji $\lfloor x \rfloor$.

Funce $x - \lfloor x \rfloor$ nabývá na intervalu $[0; 1)$ stejných hodnot jako identická funkce a dále je periodická, proto založíme řešení tohoto příkladu na nalezení periodické funkce se stejnými vlastnostmi. Tato funkce je na své periodě prostá a tuto vlastnost z G_e mají tangens a kotangens. Složíme-li tyto funkce s funkcemi, které jsou k nim na nějaké periodě inverzní, získáme funkci, která je na této periodě identická a dále periodická. Vybereme-li tedy například funkci $\mathrm{arccotg}(x)$, kterou pomocí elementárních transformací (viz. kapitola Transformace) můžeme převést na funkci shodnou s $x - \lfloor x \rfloor$ pro všechna $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Těmito transformacemi je vynásobení argumentu funkce hodnotou π (zúží intervaly na $(k; k+1)$) a vydělení celé funkce hodnotou π (zúží obor hodnot na (0,1)). Dostáváme funkci

$$f(x) = x - \frac{\mathrm{arccotg}(\mathrm{cotg}(\pi x))}{\pi}.$$

Zbývá dodefinovat funkci v celých číslech. Položme si otázku: proč funkce f není definována v celých číslech? Vnitřní funkce, která je zde problematická, je $\mathrm{cotg}(x)$, který není definován pro $x = k\pi$. Pokud si však funkci $\mathrm{cotg}(x)$ rozepíšeme do základního $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, zde vidíme, že funkce není definována pro násobky π, z toho důvodu, že sinus zde nabývá 0 a jmenovatel je tedy roven 0. Jak pozměnit sinus pouze v nulových bodech tak, aby zde již nenabýval hodnoty 0? Sestrojíme funkci, která se pro všechny násobky π rovná 1 a pro všechna ostatní reálná čísla je rovna 0 a tu poté přičteme k funkci sinus. Pokud bychom pracovali pouze na množině elementárních funcí, toto by nebylo možné (neboť se nejedná o funkci spojitou na celém svém definičním oboru, tedy není elementární). My ovšem pracujeme s funkcemi předpisovými, kde je možno takovou funkci zkonstruovat. Zcela standardně použijeme funkci signum a to na funkci sinus, neboť tak oddělíme body s hodnotou 0 od těch ostatních. Pokud navíc použijeme na sinus absolutní hodnotu, situace se ještě více zjednoduší, neboť $\operatorname{sgn}|\sin(x)|$ nabývá hodnoty 1 pro $x \neq k\pi$ a 0 pro $x = k\pi$. Odečtením od hodnoty 1 dostáváme funkci, která nabývá ve všech bodech hodnoty 0, kromě násobků čísla π, kde je rovna 1. Přičtením takto vzniklé funkce ke jmenovateli zlomku $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ a vynásobením argumentu funkce hodnotou π (abychom se dostali do celých čísel, tak jako v odstavci výše) dostáváme

$$g(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x) + (1 - \operatorname{sgn}|\sin(\pi x)|)}.$$

Tato funkce se tedy pro všechna $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ chová stejně jako $\operatorname{cotg}(x)$ a pro všechna $x \in \mathbb{Z}$ je rovna střídavě 1 a -1 (neboť pro celá čísla nabývá $\cos(\pi x)$ střídavě hodnot 1 a -1). Tuto funkci nelze upravit tak, aby jsme v celých číslech dostali správnou hodnotu, protože $\operatorname{arccotg}(x)$ nuly nikde nenabývá. Proto nyní použijeme funkci $\operatorname{arccotg}(x)$ a hodnotu v celých číslech upravíme až vně.

$$h(x) = \frac{\operatorname{arccotg}(g)}{\pi} \operatorname{sgn}|\sin(\pi x)|$$

je shodná s funkcí $x - \lfloor x \rfloor$, neboť v bodech $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ se této funkci rovná podle předchozího a v celých číslech nabývá díky násobení signem honoty 0. Z rovnosti $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$ tedy můžeme vyjádřit $\lfloor x \rfloor = x - h(x)$ neboli

$$\lfloor x \rfloor = x - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg}\left(\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x) + (1 - \operatorname{sgn}|\sin(\pi x)|)} \right) \operatorname{sgn}|\sin(\pi x)|,$$

která z principů, jakými jsme ji odvodili, skutečně odpovídá funkci dolní celá část.

1.3 Nástroje konstrukce

V této kapitole uvádím nejprve speciální typy funkcí a technik, které jsou vhodné ke konstrukcím funkcí se specifickými vlastnostmi. Jsou zde uvedeny oscilující a polynomické funkce, neboť se při konstrukcích často využívá jejich vlastností a dále operace a transformace, pomocí nichž můžeme funkce a tudíž i jejich vlastnosti upravovat.

1.3.1 Polynomické funkce

Definice 4. Funkci, kterou je možné zapsat ve tvaru

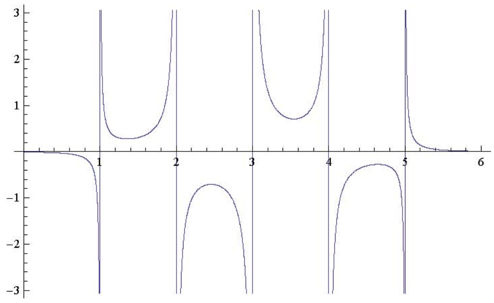
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 x^0$$

nazveme polynomickou.

Polynomické funkce jsou zvláštním typem elementárních funkcí, vzhledem k jejich jednoduchosti (jde o funkce jejichž hodnotu lze získat z proměnné x pouze pomocí sčítání a násobení). Tyto jsou velice potřebné v případě, že chceme konstruovat funkce s nějakou lokální vlastností právě v n konkrétních bodech, neboť můžeme lehce vytvořit polynom, který bude mít kořeny právě v těchto bodech. Pomocí funkce signum lze dále tuto funkci upravit na charakteristickou funkci množiny řešení rovnice či nerovnice v elementárních funkcích. To bude tedy funkce, která nabývá 1 právě pro kořeny polynomu a 0 pro všechna ostatní reálná čísla. Podobně se dá těchto funkcí použít ke konstrukci funkcí s vlastnostmi na konečném intervalu. Příklady z dalších kapitol, ve kterých konstruuji funkce pomocí polynomických funkcí, je možno nalézt pod čísly 12, 13, 20.

Příklad 5. Nalezněte elementární funkci, která není definována právě v bodech $1, 2, ..., n; n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Podle předchozí úvahy tedy sestrojíme polynom, který protíná osu x v bodech $1, 2, ..., n$. Tomuto vyhovuje například polynom $(x-1)(x-2)...(x-n)$. Nalezený polynom dále vnitřně složíme s funkcí $g(x) = \frac{1}{x}$, čímž zajistíme,



Obrázek 1.1: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}$

že nebude funkce definována právě pro kořeny polynomu. Výsledná funkce je tedy

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)...(x-n)}$$

Tuto funkci pro $n = 5$ je možné si prohlédnout na obrázku 1.1.

Polynomy nám tedy umožňují řešit mnoho příkladů z problematiky funkcí, které jsou definované (nebo mají nějaké vlastnosti) na konečně mnoha intervalech, ale nemůžeme pomocí nich řešit příklady na nekonečně mnoha intervalech. Tomuto bude věnována další kapitola.

1.3.2 Oscilující funkce

Funkci nazveme oscilující v bodě, pokud v tomto bodě jednostranně nekonverguje ani nediverguje, tedy pokud nemá v bodě jednostrannou limitu. Jedná se tedy o lokální vlastnost, neboť vždy zkoumáme, zda je funkce oscilující na nějakém okolí bodu, ať už vlastního nebo nevlastního. Pro oscilující funkce je nutné zmínit tři vlastnosti, které odporují intuitivním představám studenta.

- Přímo z definice oscilace funkce plyne, že na žádném okolí bodu, ve kterém je funkce oscilující, není tato funkce monotónní. Tento fakt je pro většinu studentů antiintuitivní, neboť běžná středoškolská představa je, že funkce je na omezeném intervalu monotónní, nebo ji můžeme rozdělit na konečný počet intervalů, na kterých už monotónní je. Příkladem funkce, která je v okolí nějakého bodu osilující, je sinus, který osciluje v $\pm\infty$, neboť právě v nevlastních bodech nemá konečnou ani nekonečnou limitu.

- Oscilující funkce nemusí být spojité. Naopak, chceme-li konstruovat funkci, která osciluje například v každém bodě nějakého intervalu (či obecněji na husté množině[2]), pak tato funkce nesmí být spojitá v žádném bodě tohoto intervalu. Jako příklad zde uvádím Dirichletovu funkci, která splňuje podmínky oscilace v každém svém bodě.

- Z předchozích příkladů by se mohlo zdát, že osilující funkce musejí být periodické. Většina konstrukcí využívající transformace již periodická nebude, například funkce $\sin(\frac{1}{x}$ je oscilující v okolí 0 a zároveň není periodická.)

Pomocí oscilujících funkcí řeším příklady číslo 9, 14, 15 a 20.

1.3.3 Transformace

Abychom byli schopni řešit příklady na konstruování funkcí, které jsem zařadil do této práce, je k řešení nutné nejen zvolit elementární či předpisovou funkci s nějakými vhodnými vlastnostmi, ale též umět tuto funkci transformovat tak, aby žádoucí vlastnosti nabývala v libovolném zvoleném bodě respektive v jeho okolí. Nejnázornější přístup k transformacím je geometrický. Geometrické transformace posléze transformujeme do předpisů. Vybral jsem několik nejpoužívanějších. V zájmu názornosti je tato část mé práce pojata neformálně, neboť se jedná především o postupy, které by měl mít student v podvědomí a pracovat s nimi na intuitivní úrovni. Z tohoto důvodu je popisuji po geometrické stránce, aby následující algebraické vyjádření bylo co nejnázornější.

[2]hustá množina je taková, pro kterou platí, že v každém okolí jejího libovolného bodu leží jiný její bod

- **Posunutí bodů ve směru osy x nebo y.** Tato transformace je algebraicky reprezentována operací sčítání (odčítání) a to buď s argumentem funkce (v případě osy x) a nebo s celou funkcí (v případě osy y).

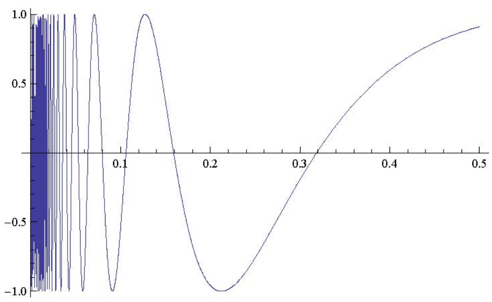
- **Přiblížení či oddálení funkčních hodnot k ose x nebo y.** Algebraicky můžeme takovou transformaci popsat pomocí násobení (dělení). Opět je možné násobit buď argument funkce nebo funkci jako celek, podle osy vůči které požadovanou transformaci zamýšlíme.

- **Přenesení „nevlastního bodu do vlastního“ a obráceně.** Tuto transformaci můžeme nejčastěji realizovat pomocí převrácené hodnoty. Transformaci můžeme opět použít buď vnitřně nebo zvenku, čímž lze přenést body ve směru osy x nebo y. Tedy například pro funkci $f(x) = x$, která má v nekonečnu nekonečnou limitu a v 0 limitu 0 sestrojíme funkci $g(x) = \frac{1}{x}$, která má v nekonečnu limitu 0 a v 0 limitu nekonečno.

Poznámka. Tyto elementární transformace lze z hlediska geometrie popsat formálně, kdy sčítání a odčítání je geometrickým posunutím, násobení a dělení osovou afinitou a přenos nevlastního bodu do vlastního „přímkovou“ inverzí (chápejme jako analogii kruhové inverze; u ní je konstantní součin vzdáleností bodu a obrazu od pevného bodu, v našem případě od přímky – osy souřadnic).

Příklad 6. Nalezněte funkci, která je oscilující v okolí 0.

Řešení. Ke konstrukci takové funkce je nutno použít dva výše zmíněné poznatky. Prvním je zřejmě fakt, že ke konstrukci budeme muset použít oscilující funkci. Vezměme například sinus. Již víme, že tato funkce je oscilující v nekonečnu, tedy stačí transformací tuto vlastnost přenést z nevlastního do vlastního bodu. Výše jsme si ukázali, že taková transformace spočívá v použití převrácené hodnoty argumentu funkce. Tedy výslednou funkcí bude $\sin(\frac{1}{x})$ jejíž graf je vidět na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

Poznámka. Funkce z příkladu 6 je velice důležitá, neboť se pomocí ní konstruují funkce k procvičování pojmů monotonie, limity a derivace.

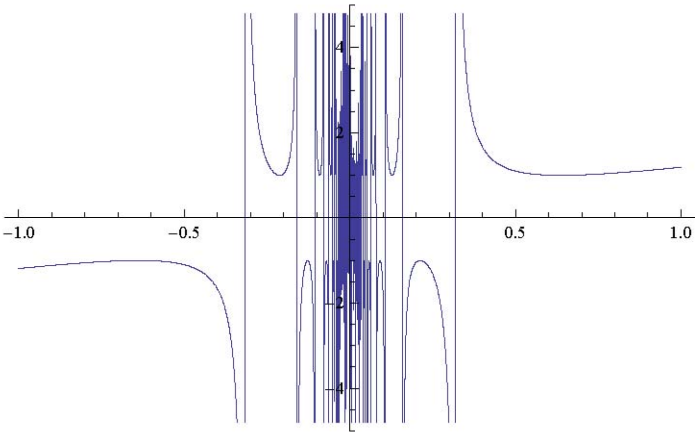
Příklad 7. Nalezněte funkci, která není v žádném okolí 0 omezená shora ani zdola.

Řešení. Vyjděme z předchozího příkladu. Pokud jsme mohli převést oscilující funkci v nekonečnu, která nabývá konečných hodnot, do vlastního bodu, je jistě možné takto převést i oscilující funkci, která má hodnoty blížící se střídavě plus i mínus nekonečnu. Tuto funkci sestrojíme opět pomocí sinu podobně jako v předchozím příkladu. Pokud totiž $\sin(x)$ použijeme jako vnitřní, $\frac{1}{x}$ jako vnější funkci a složíme je, dostáváme $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Tato funkce převede všechny hodnoty funkce sinus blížící se 0 do hodnot blížících se nekonečnu. Pokud na takto vzniklou funkci použijeme stejný postup jako v předchozím příkladě, dostáváme

$$f(x) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})},$$

která již má požadované vlastnosti na okolí 0. Funkce je graficky znázorněna na obrázku 1.3

Jednou z dalších technik pro konstrukci funkcí je přimknutí funkce k zadané asymptotě. Pro takovou transformaci je nutné, aby limita funkce v bodě, ve kterém požadujeme přimykání k asymptotě, byla rovna 0. Poté lze asymptotu přičíst k dané funkci, čímž dostaneme požadovanou vlastnost. Jinými slovy zde kombinujeme vlastnosti funkcí ve dvou bodech. Příkladem může být funkce $\frac{1}{x} + x$, kde v okolí 0 se $\frac{1}{x}$ blíží nekonečnu a x blíží 0 a v okolí



Obrázek 1.3: $f(x) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})}$

nekonečna, kde jde naopak x do nekonečna a $\frac{1}{x}$ do nuly. Součet těchto funkcí se tedy blíží nekonečnu jak v 0, tak i v nekonečnu.

Obdobou této techniky je takzvané "sevření omezené funkce mezi dvě různé funkce". Tohoto stavu je možno dosáhnout na základě následující úvahy. Mějme funkce g, f_1, f_2 takové, že na množině $M \subset \mathbb{R}$

- g je omezená a známe její supremum (dále značeno S) a infimum (značeno I),
- $f_1 \geq f_2$.

Abychom dosáhli sevření funkce g mezi funkce f_1, f_2 je nutné nalézt takovou transformaci, která zajistí, že všechny hodnoty funkce g blížící se I se zobrazí na hodnoty blížící se hodnotám funkce f_1 a podobně, všechny hodnoty funkce g blížící se S se zobrazí na hodnoty blížící se hodnotám funkce f_2. Jinými slovy interval $[I; S]$ se zobrazí na $[f_1(x); f_2(x)]$. Nejjednodušší taková transformace je lineární, tedy ve tvaru $at + b$, kde dosazením $t = I$ resp. $t = S$ dostáváme $aI + b = f_1$ resp. $aS + b = f_2$. Jelikož I, S, f_1, f_2 jsou nám známy, snadno vyjádříme hodnoty a, b:

$$a = \frac{f_1 - f_2}{S - I}$$

$$b = \frac{Sf_2 - If_1}{S - I}.$$

Funkce $\tilde{g} = ag + b$ má tedy ty vlastnosti, které požadujeme. Pro takto zkonstruovanou funkci $\tilde{g}$ jistě platí, že $f_2 \leq \tilde{g} \leq f_1$ na množině M. A v bodech, kde má $\tilde{g}$ limitu (viz definice limity v kapitole Limita) rovnou S má podíl $\frac{f_1}{\tilde{g}}$ limitu rovnou 1. Nemusí ovšem platit, že $f_1 - \tilde{g}$ má v těchto bodech limitu 0 (např. $\tilde{g} = \operatorname{arctg}(x)$, $f_1 = \mathrm{e}^x$, $f_2 = 0$). Typické použití této konstrukce však bude pro funkce, které svého suprema i infima, v příslušné množině nabývají. V bodech kde se tak děje pak nastává rovnost mezi funkcí f_1 resp. f_2 a $\tilde{g}$.

Sevření omezené funkce bylo použito pro konstrukce funkcí v příkladech 9, 15 a 17.

Kapitola 2

Základní definice: vlastnosti funkcí, okolí

V této části formálně definujme základní vlastnosti funkcí: prostotu funkce, omezenost, monotonii a konexnost a konkávnost funkce. Jak plyne z rozdělení vlastností funkcí v předchozí kapitole, všechny uvedené, až na monotonii, jsou množinové, tedy pro rozhodnutí, zda funkce vlastnost má a nebo nemá je nutné ji zkoumat na množině bodů. Pro monotonii, kterou je možno definovat jak jako lokální, tak i množinovou, tedy uvádím obě definice.

Definice uvádíme v pořadí, které odpovídá nárokům množinu, na které je zkoumáme. Prostota funkce je definována již pro zobrazení, definici pro funkce (jako speciální případ zobrazení) zde uvádím pouze pro úplnost a ve shodě s definicí prostého zobrazení. Dále omezenost funkce můžeme definovat, je-li definována omezenost množin na oboru hodnot funkce (např. pro podmnožiny nějakého metrického prostoru). Nakonec uvádím monotonii, konvexnost a konkávnost, u kterých je již zapotřebí jistého uspořádání prvků definičního oboru i oboru hodnot. Tím musí být uspořádání lineární (někdy také úplné), ve kterém můžeme jednoznačně porovnat libovolné prvky dané množiny.

Příkladem omezené množiny, na které není definováno lineární uspořádání, nám mohou být komplexní čísla. Na této množině nemůžeme porovnat žádné dva prvky a tedy nemůžeme definovat monotonii. Ale protože zde existuje metrika ($|z_1 - z_2|$), má zde smysl definovat omezenost komplexní funkce.

Definice 5 (Prostá funkce)**.** Říkáme, že funkce f je prostá na množině A, pokud pro $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definice 6 (Omezená funkce)**.** Funkci $f(x)$ nazveme omezenou na nějaké neprázdné množině A, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in A$ je $|f(x)| < K$.

Poznámka. Říkáme, že funkce $f(x)$ je omezená zdola na A pokud existuje $L_1 \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in A$ je $f(x) > L_1$. Podobně říkáme, že funkce $f(x)$ je omezená shora na A pokud existuje $L_2 \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in A$ je $f(x) > L_2$.

Na rozdíl od jiných lokálních vlastností (např. spojitost), které se rozšiřují na množinové konjunkcí přes všechny body dané množiny, se takto monotonie rozšířit nedá. Příkladem nám může být funkce $\frac{1}{x}$, která je na intervalu $-\infty; 0)$ klesající, na intervalu $(0; \infty)$ také klesající, ale už nemůžeme říci, že je klesající na celém $\mathbb{R}$. Z tohoto důvodu zde uvádím obě definice, i přesto, že v kontextu této kapitoly by sem měla patřit spíše ta na množině.

Definice 7 (Monotonie v bodě)**.** Pokud pro nějaký bod a platí, že pro něj existuje okolí $U(a)$ takové, že pro všechna x v tomto okolí platí:

$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$ a zároveň $x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$, potom říkáme, že funkce je rostoucí v bodě a,

$x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$ a zároveň $x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$, potom říkáme, že funkce je klesající v bodě a,

$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ a zároveň $x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$, potom říkáme, ž funkce je neklesající v bodě a,

$x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ a zároveň $x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$, potom říkáme, že funkce je nerostoucí v bodě a.

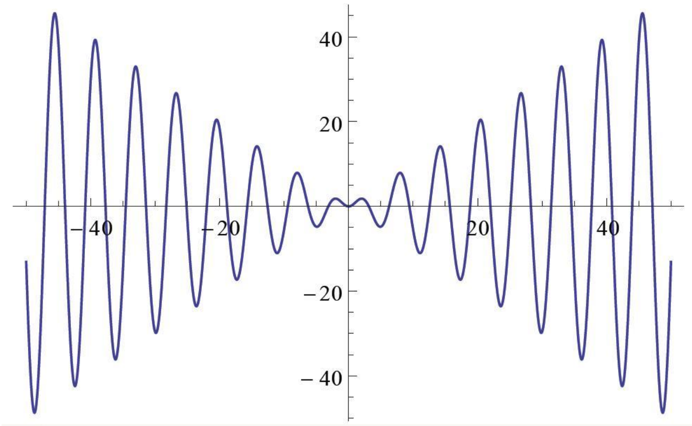
Pokud má f v bodě a nějakou z těchto čtyř vlastností, říkáme o ní, že je monotónní v a, pokud je rostoucí nebo klesající, zpřesňujeme termín na ryze monotónní v a.

Definice 8 (Monotonie na množině)**.** Funkci f nazveme rostoucí na množině A, jestliže pro všechna $x, y \in A : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Pokud nahradíme znaménko „$<$“ v nerovnosti $f(x) < f(y)$ po řadě za „$>, \leq, \geq$“, říkáme, že funkce je na množině po řadě klesající, nerostoucí, neklesající. Pokud má funkce f na množině A nějakou z těchto vlastností, říkáme, že je na A monotónní, pokud je zde rostoucí nebo klesající, říkáme že je na A ryze monotónní.[ZMA]

Definice 9 (Okolí bodu)**.** Nechť a je konečný bod množiny M s lineárním uspořádáním, $\varepsilon > 0$. Interval $(a - \varepsilon; a]$ nazveme levým ε-okolím bodu a a píšeme $U_\varepsilon^-(a)$. Podobně interval $U_\varepsilon^+(a)$:=$[a; a + \varepsilon)$ nazveme pravým ε-okolím bodu a, $P_\varepsilon^-(a)$:=$(a - \varepsilon; a)$ nazveme levým prstencovým ε-okolím bodu a, $P_\varepsilon^+(a)$:=$(a; a + \varepsilon)$ nazveme pravým prstencovým ε-okolím bodu a.
Interval $U_\varepsilon(a)$:=$(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ nazveme úplným ε-okolím bodu a.
Interval $P_\varepsilon(a)$:=$(-\varepsilon; a) \cup (a; \varepsilon)$ nazveme prstencovým ε-okolím bodu a.
Dále pro $a = \infty$ resp. $a = -\infty$ definujeme interval $(\varepsilon; a)$ resp. $(a; -\varepsilon)$ jako ε-okolí bodu a v nekonečnu resp. v mínus nekonečnu.[ZMA]

Úmluva. Zápisem $U(x)$ bez použití parametru ε, budeme dále rozumět libovolné okolí bodu x.

Pokud tyto, na první pohled triviální pojmy, vhodným způsobem zkombinujeme, zjistíme, že vyžadují poměrně značný vhled do problematiky funkcí a že tedy mohou studentům působit potíže (zde to budou spíše studenti středních škol). Pokud položíme otázku ”Je vám jasný pojem omezená funkce?” nebo ”Dokážete si představit monotónní funkci?”, většina studentů se základními znalostmi odpoví, že ano. Pokud se však speciálním případem, popřípadě kombinací některých z výše uvedených vlastností dotážeme na některé méně zřejmé příklady funkcí, většina studentů se dostane do obtíží. Pro názornost uvedu několik příkladů:



Obrázek 2.1: $f(x) = x\sin(x)$

Příklad 8. Existuje funkce rostoucí na celém $\mathbb{R}$, která je zároveň omezená?

Řešení. Tento úkol začínající matematiky na první pohled zaskočí, ovšem když se na něj zadíváme pozorněji, zjistíme, že z elementárních funkcí to je například $\operatorname{arctg}(x)$.

Příklad 9. Nalezněte funkci, která není omezená shora ani zdola na žádném okolí nekonečna.

Řešení. Ke konstrukci bude potřeba použít oscilující funkci, neboť je potřeba, aby se některé její hodnoty blížily ∞ a jiné blížily $-\infty$. opět vezměme základní $\sin(x)$. Zajistit, aby tato funkce byla neomezená shora i zdola nám pomůže sevření mezi vybrané funkce. Těmi mohou být $-x$ a x. Pro lepší představu nám poslouží obrázek 2.1. V současné situaci již známe vše potřebné k použití obecného postupu výše, neboť $g(x) = \sin(x), I = -1, S = 1, f_1 = x, f_2 = -x$ (jelikož existuje okolí nekonečna, že $f_1 > f_2$). A zbývá tedy pouze dosadit do vzorce, tedy

$$a = \frac{x - (-x)}{1 - (-1)} = x,$$

$$b = \frac{1(-x) - (-1)x}{1 - (-1)} = 0.$$

Výslednou funkcí, která je na okolí nekonečna shora omezena funkcí x a zdola $-x$ je

$$f(x) = x\sin(x)$$

Příklad 10. Existuje prostá elementární, nebo předpisová funkce, která je na nějakém intervalu svého definičního oboru rostoucí, na jiném intervalu definičního oboru klesající, ale přesto je omezená?

Řešení. První důležitý mezikrok k nalezení takovéto funkce je úvaha, že musí být klesající na nějakém intervalu, a musí zde nabývat nějaké vlastní hodnoty, na jiném intervalu musí být rostoucí, ale opět se musí blížit nějaké vlastní hodnotě[1]. Abychom zároveň zajistili prostotu funkce, je nutné, aby ona funkce nemohla změnit monotonii spojitě. Tedy se bude nutně jednat o funkci nespojitou.

Poznámka. V této chvíli je vhodné odkázat čtenáře na příklad 12 v kapitole Spojitost. Z něj je vidět, že funkce v bodě nespojitosti buď nemusí být vůbec definovaná, nebo zde není spojitá. Z tohoto plyne, že můžeme nalézt funkci v bodě, kde mění monotonii, buď nespojitou (toto splňují funkce předpisové) nebo nedefinovanou (takovou můžeme najít dokonce funkci elementární).

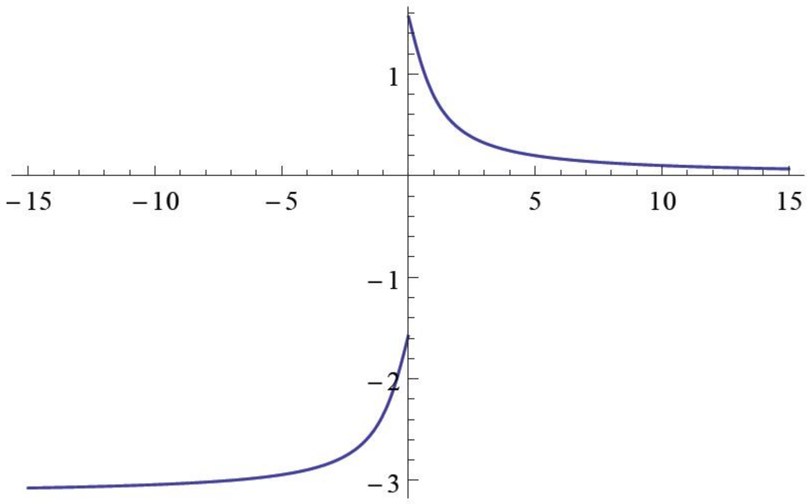
Funkce $\operatorname{arccotg}(x)$ je klesající na celém definičním oboru. Pokud tuto funkci vynásobíme funkcí $\operatorname{sgn}(x)$, „převrátí“ se část funkce pouze pro záporná x, přičenž 0 se zobrazí do 0. Tato funkce již splňuje naše požadavky, neboť pro záporná x je rostoucí do hodnoty $-\frac{\pi}{2}$ a pro kladná x klesá do 0, přičemž jsme zachovali její omezenost (neboť původní $\operatorname{arccotg}(x)$ je také omezená). Výsledkem našich úvah je tedy funkce

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(x)\operatorname{sgn}(x),$$

zobrazená na obrázku 2.2.

Poznámka. Pokud bychom hledali funkci elementární stačí použít zúžení funkce signum na funkce elementární, což se provádí pomocí funkce $\frac{|x|}{x}$.

[1] Tyto hodnoty se mohou dokonce rovnat, protože funkce se k dané hodnotě může blížit limitně, aniž dané hodnoty dosáhne



Obrázek 2.2: $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)\operatorname{sgn}(x)$

Příklad 11. Rozhodněte, zda je následující definice ekvivalentní s definicí rostoucí funkce v bodě.

Definice 10. Funkci f nazveme rostoucí v bodě a, pokud pro tento bod platí, že $\exists U(a) \forall x, y \in U(a) : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Poznámka. Jedná se o zúžení definice monotonie na množině na lokální verzi. Cílem tohoto příkladu je ukázat, že na rozdíl od mnoha lokálních vlastností toto není možné provést s monotonií.

Řešení. Je zřejmé, že z formální definice 7 přímo plyne definice 10. Hledáme tedy příklad, který splňuje definici 7, ale nesplňuje definici 10. Jinými slovy hledáme funkci, která je vlevo od a menší než $f(a)$, ale zároveň není v žádném levém okolí a rostoucí. Podobně musí být tato funkce vpravo od a větší než $f(a)$, ale opět nesmí být v žádném pravém okolí a rostoucí. Takovou vlastnost má funkce $\operatorname{sgn}(x)$ v bodě 0.

Daleko zajímavějším se stává příklad ve chvíli, kdy se budeme snažit najít funkci, která splňuje výše uvedené vlastnosti a zároveň je spojitá. Tímto příkladem se dostáváme hlouběji do problematiky spojitosti, a proto tuto část vyřešíme dále, až si zavedeme formální definici. Ovšem odpovědět na zadání úkolu můžeme již teď, neboť jsme nalezli funkci, která je v souladu s definicí 7, ale odporuje definici 10. Definice tedy nejsou ekvivalentní.

Kapitola 3

Spojitost

Základními stavebními prvky matematické analýzy jsou úzce svázané pojmy spojitosti, limity a derivace. Prním dvěma bude nadále věnována velká pozornost, jelikož jejich pojmenování vzbuzuje u studentů jistou intuitivní představu, ale samotná formální definice znamená ve skutečnosti mnohem více, než je na první pohled zřejmé. Spojitá funkce je obecně chápána jako „souvislá čára, kreslená jedním tahem“. Matematicky korektní definice tohoto pojmu ovšem postihuje daleko větší množinu funkcí, než toto jednoduché připodobnění.Cílem této kapitoly je odhalit, jak různorodé příklady spojitých funkcí se skrývají za definicí pojmu spojitosti.

Definice 11 (spojitost funkce v bodě)**.** Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě x_0 zleva resp. zprava, jestliže platí

$$\forall U^-(A) \exists U^-(x_0) : f(U^-(x_0)) \subset U^-(A).$$

$$resp.$$

$$\forall U^+(A) \exists U^+(x_0) : f(U^+(x_0)) \subset U^+(A).$$

Dále říkáme, že f je spojitá v bodě x_0, pokud je spojitá v tomto bodě zprava i zleva.[ZMA]

Definice 12 (spojitost funkce na intervalu)**.** Říkáme, že funkce je spojitá na otevřeném intervalu I, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Podobně říkáme, že je funkce spojitá na polouzavřevém intervalu $[a; b)$ resp. $(c; d]$, pokud je spojitá ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu a spojitá v a zprava, resp. spojitá v b zleva.

Dále říkám, že funkce je spojitá na uzavřeném intervalu $[e; f]$, pokud je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu a dále pokud je v e spojitá zprava a v f spojitá zleva.[DI]

Pokud zadáme studentům úkol: "Řekněte příklad funkce spojité na celém $\mathbb{R}$". Většinu studentů napadne nějaká z funkcí množiny G_e, na které je na první pohled "vidět", že je spojitá. Ovšem pojem spojitosti je jeden z těch, kde bývá rozdíl mezi představou a skutečnou definicí.

Příklad 12. Existuje předpisová funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$ kromě bodu x?

Řešení. Řešení této má dvě varianty. Pro funkci totiž může platit že

1. v bodě x_0 není spojitá, příkladem je $\operatorname{sgn}(x - x_0)$.

2. není v daném bodě ani definovaná, ale na libovolně malém prstencovém okolí tohoto bodu již spojitá je, např. $\frac{1}{x-x_0}$.

Většina studentů pravděpodobně přijde s variantou 2., jelikož představa nedefinované funkce v bodě je jim bližší než ona nespojitost v bodě. Z důvodu, že nedefinovanosti dosáhneme již v množině elementárních funkcí, zatímco nespojitosti v definičním obodu ne. Proto, pokud pokládáme tuto otázku při procvičování pojmu spojitosti, měli bychom ji upřesnit například takto: **Existuje funkce, definovaná na celém $\mathbb{R}$, která je spojitá ve všech bodech vyjma bodu x_0?** Poté můžeme odpovědět, že hledanou funkcí s touto vlastností je $\operatorname{sgn}(x - x_0)$ s bodem nespojitosti v x_0.

Příklad 13. Nalezněte předpisovou funkci spojitou na celém $\mathbb{R}$ kromě bodů $x_1, x_2, ..., x_n$.

Řešení. Jak jsme naznačoval v kapitole Konstrukce funkcí, na takovéto příklady je nejlepší použít funkce, které můžeme zadefinovat s přesným počtem nulových bodů, tedy funkce polynomické. Abychom z polynomické funkce dostali funkci nespojitou právě v těchto bodech, složíme ji s vnější funkcí signum. Výsledkem je tedy

$$f(x) = \operatorname{sgn}[(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n)].$$

Příklad 14. Nalezněte předpisovou funkci nespojitou v nekonečně, ale spočetně mnoha bodech.

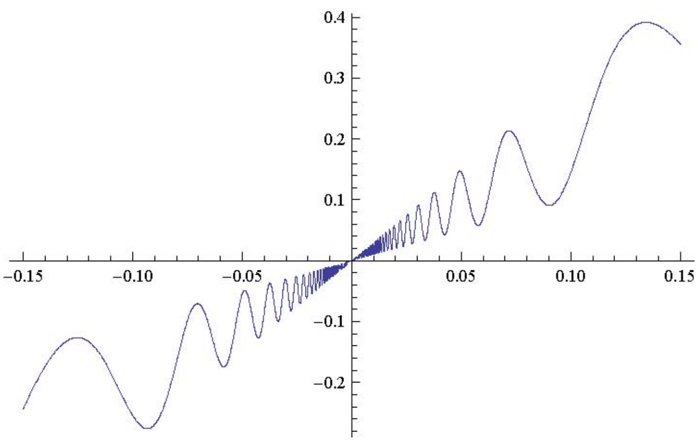
Řešení. Funkci budeme hledat podobně jako v příkladu výše, je nutné pouze zajistit, aby měla místo konečně mnoha nekonečně, ale spočetně mnoho takových bodů. Takové vlastnosti má funkce $\sin(x)$. Složením se signem dostáváme

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(x)),$$

která má v každém bodě $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ bod nespojitosti. Protože takových k je spočetně mnoho, nlezli jsme i spočetně mnoho bodů nespojitosti.

Příklad 15. Nalezněte spojitou funkci, která splňuje v nějakém bodě definici 7 rostoucí funkce, ale nesplňuje definici 10.

Řešení. Tato úloha vychází z příkladu 11. Hledáme zde tedy spojitou funkci, která pro libovolně malé levé okolí bodu a nabývá hodnot menších než $f(a)$, ale na tomto okolí není rostoucí ani klesající. A zároveň na každém libovolně malém pravém okolí a nabývá hodnot větších než $f(a)$ a také zde není rostoucí ani klesající. Z podmínky, že tato funkce nesmí být rostoucí ani klesající je nutné, aby se jednalo o funkci oscilující v bodě a (tyto podmínky splňuje i konstatní funkce, ale ta potom není spojitá ani v bodě a). Funkci oscilující ve vlastním bodě a jsme již konstruovali v příkladě 6. Vyjděme z něj. Je tedy vidět, že funkce $\sin \frac{1}{x-a}$ není podle definice monotonie na množině monotónní ani na levém, ani na pravém okolí bodu a. Zbývá zajistit, aby existovalo takové levé okolí a, že pro všechna x z tohoto okolí bude $f(x) < f(a)$ a aby existovalo pravé okolí bodu a tak, že pro všechna x z tohoto okolí bude $f(x) > f(a)$. Konstruujeme jednu konkrétní funkci, proto zvolme bod a pevně, tedy například $a = 0$. Výše zmíněného omezení docílíme použitím



Obrázek 3.1: $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x$

techniky z kapitoly Konstrukce funkcí. Sevřeme tuto oscilující funkci mezi funkce $f_1(x) = 3x$ a $f_2(x) = x$. Tím zajistím, že všechny body vlevo od 0 budou menší než 0 a všechny hodnoty vpravo od 0 větší než 0. Jelikož známe všechny potřebné údaje, můžeme spočíst

$$a = \frac{3x - x}{1 - (-1)} = x$$

$$b = \frac{1x - (-1)3x}{1 - (-1)} = 2x.$$

Výslednou funkcí tedy bude

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x$$

s tím, že definici 7 nesplňuje v bodě 0.

Příklad 16. Existuje funkce nespojitá v každém bodě $\mathbb{R}$

Řešení. První funkcí s touto vlastností, která by měla každého studenta napadnout po přečtení předchozích kapitol, je Dirichletova funkce. K důkazu její nespojitosti v každém bodě reálné osy ovšem budeme potřebovat následující lemma:

Lemma 1. Mezi každými dvěmi racionálními čísly se nachází alespoň jedno iracionální a mezi každými dvěmi iracionálními se nachází alespoň jedno racionální.

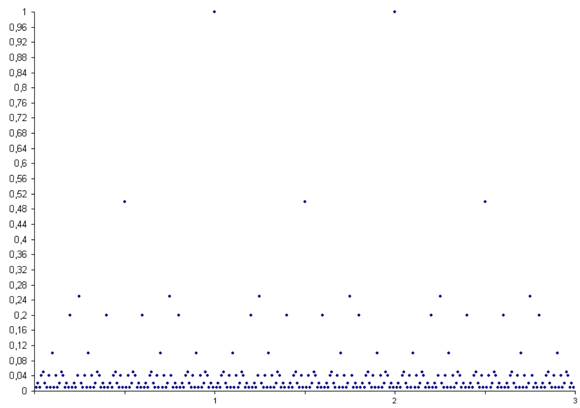
Jinými slovy: každý interval (libovolně malý) obsahuje racionální i iracionální čísla. Aby byla funkce v racionálních bodech spojitá, musí platit následující: pro libovolně malé okolí bodu 1 ($U(1)$) existuje okolí racionálního bodu $U(x)$ tak, že $D(U(x)) \subset U(1)$. Abychom dosáhli sporu volme $U(1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Z předchozí věty plyne, že v libovolně malém okolí bodu x jsme schopni nalézt iracionální číslo, které má funkční hodnotu 0, tedy pro každé $U(x)$ platí, že $D(U(x)) \not\subset U(1)$. Důkaz nespojitosti v bodech iracionálních je analogický.

Příklad 17. Nalezněte funkci z množiny $\langle G_e^D \rangle$ spojitou právě v jednom bodě.

Vyjděme při konstrukci této funkce z předchozí úlohy. $D(x)$ zúžená na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se rovná 0 a zúžená na $\mathbb{Q}$ se rovná 1. Vynásobením $D(x)$ funkcí f se v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nezmění a v $\mathbb{Q}$ bude rovna f. Hledáme takovou spojitou funkci f, která právě v jednom bodě nabývá hodnoty 0. Takovou funkcí je například identická funkce $f(x) = x$. Vynásobením dostáváme funkci $xD(x)$, která bude splňovat definici spojitosti v bodě 0, protože funkční hodnoty racionálních čísel se v okolí nuly blíží nule a funkční hodnoty iracionálních čísel jsou stále nulové a tudíž v okolí 0. Další možnou konstrukcí je použití postupů z kapitoly Konstrukce funkcí. Jelikož víme, že Dirichletova funkce je oscilující v každém svém bodě, můžeme na ní aplikovat sevření mezi dvě funkce. Těmi budou $f_1(x) = x, f_2(x) = 0$, neboť tím, že $D(x)$ sevřeme mezi tyto funkce podle odvozeného postupu, dostáváme stejnou funkci $xD(x)$.

Poznámka. Z množiny funkcí ve tvaru $f(x)D(x)$, do které spadá i výše zmíněná $xD(x)$, můžeme najít v kontextu spojitosti a limity (i derivace) mnoho zajímavých příkladů, jelikož zde existují funkce s velmi zajímavými vlastnostmi z hlediska didaktického.

Poznámka. Následjící příklad je velice obtížný, nelze očekávat, že studenti vyřeší takto pokročilou úlohu, proto zde uvádíme pouze důkaz pro Riemannovu funkci.



Obrázek 3.2: Riemannova funkce

Příklad 18. Nalezněte funkci spojitou právě ve všech iracionálních a nespojitou ve všech racionálních bodech.

Řešení. Za všechny takové funkce vyberme funkci Riemannovu (dále ji budeme značit $R(x)$), která je definována takto: Každému iracionálnímu číslu přiřadí 0 a každému racionálnímu ve tvaru $\frac{p}{q}$ (kde p, q, jsou nesoudělná) přiřadí hodnotu $\frac{1}{q}$. Prohlédnout si ji můžeme na obrázku 3.2.

Poznámka. Z obrázku je vidět, že Riemannova funkce je jedna z těch, které odporují obecné představě průměrného studenta (protože nemá tvar "souvislé čáry"), ale, jak ukážeme za chvíli, nijak neodporují definici spojitosti.

Dokažme, že Riemannova funkce je

1. nespojitá v každém racionálním bodě

   Důkaz. Předpokládejme, že je R v racionálních bodech spojitá. Nechť je tedy $x_0 \in \mathbb{Q}$. Zvolme $U(R(x_0)) \subset \mathbb{R}^+$, což jistě lze, neboť $\mathbb{R}(x_0) > 0$. Pokud má být $R(x)$ v x_0 spojitá, musí existovat $U(x_0)$ takovéto: $R(U(x_0)) \subset U(R(x_0))$. V každém takovém okolí však podle lemma 1 $\exists x_1 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pro které je $R(x_1) = 0$. To je ovšem spor s tím, že všechny body $U(R(x_0))$ jsou kladné. $\square$

2. spojitá v každém iracionálním bodě.

Důkaz. Pro spojitost v iracionálním bodě x_1 musí platit:

$$\forall U(0) \exists U(x) : R(U(x)) \subset U(0).$$

Budeme dokazovat jen pro $U_{n^{-1}}(0)$, $n \in \mathbb{N}$, neboť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (a tedy $U_{n^{-1}}(0) \subset U_\varepsilon$), takže je-li $R(U(x))$ podmnožinou $U_{n^{-1}}(0)$, je i podmnožinou U_ε. Mějme tedy pevné $n_0 \in \mathbb{N}$. Z libovolného okolí x_1 se do $U_{n_0^{-1}}(0)$ zobrazí všechny body kromě těch racionálních, jejichž jmenovatel v základním tvaru je menší nebo roven n_0. Těch je ovšem konečně mnoho a x_1 leží v nějakém intervalu mezi nimi. Pro libovolné $U(x_1)$, které je celé v tomto intervalu, tedy již platí $R(U(x_1)) \subset U_{n_0^{-1}}(0)$, čímž je důkaz hotov. $\square$

Poznámka. Pokud se zpětně podíváme na větu 1 a příklad 18, mnohé zvídavé studenty může napadnout sestrojit funkci, jež bude spojitá ve všech svých racionálních bodech a nespojitá v iracionálních. Takovou funkci ale sestrojit nelze. Ovšem důkaz tohoto tvrzení přesahuje rámec této práce.

Položme si otázku: Existuje funkce s nějakou vlastností spojitosti, která je v množině všech reálných funkcí reálné proměnné právě jedna/ je jich konečně mnoho/ je jich spočetně mnoho? Odpovědí je následující věta.

Věta 2. *Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce spojité v bodě a, $a \in \mathbb{R}$. Potom i $f(x) + g(x)$,$f(x) \cdot g(x)$ jsou spojité v bodě a.[ZMA]*

Je tedy vidět, že pokud nalezneme funkci, která splňuje nějaká kritéria spojitosti (např. v úlohách výše), nalezli jsme takovýchto funkcí nekonečně a dokonce nespočetně mnoho.

Kapitola 4

Limita

4.1 Definice limity funkce

Definice 13 (Limita funkce)**.** Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ a píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, pokud platí

$$\forall U(a) \exists P(x_0) : f(P(x_0)) \subset U(a).$$

Podobně funkce f má v x_0 limitu zprava (resp. zleva), pokud

$$\forall U^+(a) \exists P^+(x_0) : f(P^+(x_0)) \subset U^+(a)$$

$$resp.$$

$$(\forall U^-(a) \exists P^-(x_0) : f(P^-(x_0)) \subset U^-(a)).$$

[ZMA]

Poznámka. (Nutná podmínka existence limity.) Nutnou podmínkou pro to, aby měl výraz $f(P(x))$ smysl, je, že $P(x)$ musí být podmnožinou definičního oboru funkce f.

Poznámka. Definice limity funkce je velice podobná definici spojitosti. Místo funkční hodnoty zde vystupuje hodnota limity a místo $U(x)$ je zde $P(x)$. Intuitivně se dá říci, že limita je hodnota, které se daná funkce přiližuje, zatímco spojitost, je taková vlastnost, že funkce se přibližuje své hodnotě.

Vyslovme tedy velice užitečnou větu, jejíž důkaz je možno nalézt například v [ZMA].

Věta 3. *Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě když* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Stejně jako spojitost, tak i slovo „limita“ nám pomáhá představit si danou vlastnost snadněji – asi jako „hodnotu, které se daná funkce blíží v nějakém bodě, přičemž tato hodnota může být funkční hodnotou zadané funkce, ale nemusí“. Tato snaha studentů zjednodušit si neformálně daný pojem pro lepší pochopení sice pomáhá, ale v některých případech může opět vést k omylům a nepřesnostem. Pokusím se to ukázat na několika dalších příkladech. Představme si funkce následujících vlastností:

Příklad 19. Nechť je $f(x)$ funkce mající limitu v každém $x \in \mathbb{R}$. Je tato funkce nutně definovaná na celém $\mathbb{R}$?

Řešení. První množina menší než celá reálná osa vznikne tak, že odebereme právě jeden bod, tedy například 0. Jsme schopni najít funkci, která má limitu na celém $\mathbb{R}$ a není definovaná v 0? Je to například $\frac{1}{x^2}$). Takovouto funkci lehce nalezneme. Položím tedy otázku znovu a lépe.

Příklad 20. Nalezněte funkce, které mají na celém $\mathbb{R}$ limitu a přitom nejsou definované právě v

- **jednom bodě,**
- **právě n bodech,**
- **nekonečně mnoha bodech,**
- **nespočetně mnoha bodech.**

Řešení. V prvním případě je tedy příkladem výše zmíněná $\frac{1}{x^2}$).

V druhém bodě použijme polynomickou funkci z kapitoly konstrukce funkcí. Tou je $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)...(x-n)}$, která není definována právě v bodech $1, 2, ..., n$. Tato funkce je v těchto bodech zprava i zleva neomezená, ale nemá limitu, neboť z jedné strany je limita ∞ a zdruhé $-\infty$. Je nutné, aby se limity zprava a zleva rovnaly a to nejsnáze provedeme například absolutní hodnotou, případně umocněním na sudou mocninu. Výsledná funkce

$$f(x) = \frac{1}{((x-1)(x-2)...(x-n))^2}$$

má tedy limitu i v n bodech, kde funkce není definována, i když nevlastní. Ta je v těchto bodech rovna $+\infty$.

Ke konstrukci funkce, která je nedefinovaná v nekonečně, ale spočetně mnoha bodech, můžeme použít podobného postupu jako v kapitole o spojitosti. Zde tedy použijeme funkci sinus, neboť funkce $\frac{1}{\sin(x)}$ není definovaná v těch bodech, v jakých požadujeme (princip je stejný jako v předchozím bodě, akorát počet nulových bodů funkce ve jmenovateli jsme změnili z konečného na nekonečný). Funkci musíme opět umocnit na druhou abychom zajistili existenci nevlastní limity. Výsledná funkce tedy vypadá takto

$$f(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2}.$$

Posledním případem je konstrukce s nespočetně mnoha nedefinovanými body. Jistě můžeme již teď říci, že toto zadání nelze splnit. A to z toho důvodu, že nespočetná množina čísel je již natolik „hustá“, že není možné, aby v těchto bodech splňovala podmínky limity. Následuje tedy formální věta s důkazem.

Věta 4. *Neexistuje funkce, která by měla v každém reálném bodě limitu a zároveň nebyla definována v nespočetně mnoha bodech.*

Důkaz. Mějme množinu M obsahující nespočetně mnoho bodů, která je podmnožinou reálných čísel. Pokud reálná čísla rozdělíme podle celých čísel na intervaly $[k; k+1], k \in \mathbb{Z}$, existuje alespoň jeden takový interval, který obsahuje nespočetně mnoho bodů množiny M (pokud by každý interval obsahoval pouze spočetně mnoho bodů, jejich sjednocením by nemohla vzniknout nespočetná množina). Rozpůlíme-li tento interval, tak alespoň v jednom z nich bude opět nespočetně mnoho bodů. Tento interval můžeme opět rozdělit a touto metodou půlení intervalů, je možno pokračovat až do nekonečna. Dále použijme Bolzano-Weierstrassovu větu:

Věta 5. *Nechť jsou intervaly* $[\alpha_n;\beta_n]$ *do sebe zařazené, tj. nechť pro* $-\infty < \alpha_n < \beta_n < \infty$ *platí*

$$[\alpha_{n+1};\beta_{n+1}] \subset [\alpha_n;\beta_n]$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\alpha_n;\beta_n] \neq \emptyset$. *Je-li navíc* $\beta_n - \alpha_n \to 0$, *pak je tento průnik jednobodový.[ZMA]*

Neboť v tomto případě je $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}$, což pro $n \to \infty$ má limitu 0, z předchozí věty plyne, že existuje bod $x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty}[\alpha_n;\beta_n]$, v jehož každém prstencovém okolí existuje nespočetně mnoho x takových, že $f(x)$ zde není definována. Tedy nemůžeme nalézt takové prstencové okolí bodu x_0, které by bylo celé podmnožinou definičního oboru a proto v funkce v bodě x_0 nemá limitu (viz. poznámka Nutná podmínka existence limity). □

Důležitým důsledkem tohoto důkazu je fakt, že nespočetné množství bodů v $\mathbb{R}$ nemůže být izolovaných, tedy aby pro každý bod existovalo jeho okolí, které by žádný z dalších těchto bodů neobsahovalo. Chceme-li tedy konstruovat funkci, která má nějakou vlastnost v nespočetně mnoha bodech, je nutné s tímto faktem počítat.

4.2 Věty o limitě funkce

Limity funkcí mají mnoho vlastností, které jsou popsány pomocí jednotlivých vět. Některé z nich zde uvedeme a podíváme se, jak v principu fungují.

Věta 6 (Věta o dvou policajtech)**.** *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$. *Nechť existuje nějaké okolí* $P(x_0)$ *tak, že pro všechna* $x \in P(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. *Potom je i* $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.*[DI]*

Věta 7 (Limita součtu)**.** *Nechť funkce* f, g *jsou definovány v nějakém prstencovém okolí bodu* x_0, *potom*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

pokud má pravá strana smysl.[DI]

Poznámka. Věta platí ve stejném znění i pro jednostranné limity.

Věta 8. *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existuje a je vlastní, potom platí:*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Zatímco ve větě 7 jsme o limitách funkcí f, g nepředpokládali nic, ve větě 8 jsme předpoklady posílili o to, že musí být alespoň jedna z nich vlastní. Tímto a podmínkou „pokud má alespoň jedna strana smysl" se z rovnosti mezi pravou a levou stranou stává plnohodnotná ekvivalence. Tedy za cenu použití silnějších předpokladů a z tohoto plynoucího omezení počtu funkcí na které můžeme větu použít, jsme získali nástroj, jehož použitím nemůžeme ztratit smysluplnost výrazu. Zjistíme-li za použití této věty, že pravá strana nemá smysl, tak to znamená, že neexistovala ani limita původní.

Věta 7 i věta 8 nám umožňují „dosazovat do limity součtu". Ovšem u věty 7 studenti často zapomínají ověřovat předpoklad smysluplnosti pravé strany a užívají větu jako ekvivalenci. Tedy pokud zjistí, že pravá strana nemá smysl, vyvozují z toho, že neexistuje ani původní limita. Z didaktického hlediska je nutno zkoumat, kdy takový přístup vede k nesprávným výsledkům. Položme si tedy otázku: za jakých okolností pravá strana smysl nemá, ale levá ano? Odpovědí je, že mohou nastat dva případy. Pro větší přehlednost si je prezentujme na příkladech.

1. Alespoň jedna z limit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ nemá smysl, ale limita součtu už smysl má.

   Příklad 21. Nalezněte funkce f, g a bod x_0 s vlastností 1.

   Řešení. Hledáme funkci, pro kterou neexistuje limita v bodě x_0. Zvolme tedy například $x_0 = \infty$. Jednou z funkcí, která v nekonečnu nemá limitu je $f(x) = \sin(x)$. K ní hledáme funkci g, která limitu má a zároveň také součet $f(x)+g(x)$ limitu má. Pokud bychom však za $g(x)$ dosadili funkci, která má v nekonečnu limitu vlastní, bylo by možné použít větu

8 a protože se jedná o ekvivalenci (pokud nemá smysl pravá strana, potom ho nemá ani levá a naopak) zjistili bychom, že limita součtu neexistuje. Je tedy potřeba použít funkci, která má v nekonečnu limitu nevlastní. Vezměme tedy například $g(x) = x$. Tato funkce má limitu ∞ a součet

$$\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = \sin(x) + x = \infty$$

podle věty o dvou strážnících (funkci $\sin(x) + x$ omezíme shora funkcí $x + 1$ a zdola $x - 1$). Je tedy vidět, že limita součtu existuje i přes to, že jsme nemohli použít ani jednu větu o limitě součtu.

2. Obě limity i limita součtu smysl mají, ale součet limit nemá smysl. Tato situace nastává pouze tehdy, když se jedna z limit rovná $+\infty$ a druhá $-\infty$.

Příklad 22. Nalezněte funkce f, g a bod x_0 tak, aby měly vlastnost 2.

Řešení. Tento příklad není obtížný, zvolme za x_0 hodnotu 0 a nalezněme dvě funkce takové, že jejich limita v 0 je $+\infty$. Pokud jednu odečteme od druhé, dostaneme výraz, který smysl nemá, pokud ale zvolíme funkce f a g vhodně, úpravami můžeme získat výraz, jehož limita existovat bude. Volme tedy $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ a $g(x) = -\frac{1}{x^4}$, $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$. Potom součet limit neexistuje, ovšem limita součtu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^4} = -\infty.$$

Příklad 23. Nalezněte příklad na použití limity součtu, který lze vyřešit použitím věty 7 a nelze vyřešit použitím věty 8 a naopak.

1. Aby nebylo možné použít větu 8 je nutné, aby ani jedna z limit nebyla konečná a zároveň, aby součet měl smysl. Toho dosáhneme triviálně pomocí dvou funkcí, které mají pro x jdoucí do nekonečna nekonečnou limitu. Tedy například $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Protože

$$\lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

tedy pravá strana má smysl, můžeme užít větu 8 a zadání je splněno, neboť limita

$$\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \infty.$$

2. Abychom nalezli funkce, na jejichž limity můžeme použít větu 8, ale nemůžeme použít větu 7, musí platit, že součet limit smysl mít nebude. Za takovéto funkce vybírejme z těch nejjednodušších, například $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ pro $x_0 = \infty$. Pokud použijeme k výpočtu limity $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x))$ větu 7, zjistíme, že pravá strana, tedy $\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \sin(x)$ neexistuje, proto nemůžeme danou větu použít, pokud ovšem použijeme 8, pravá strana stále smysl nemá. Zde užijeme toho, že se jedná o ekvivalenci. Z tohoto faktu vyplývá, že ani limita levé strany, tedy $\lim_{x\to\infty}(1 + \sin(x))$ neexistuje.

Kapitola 5

Závěr

Cílem této práce, který jsem si stanovil během prvních konzultací, byla snaha vytvořit didakticky pojatý text na téma Spojitost, limita a derivace, v němž budu prezentovat tyto pojmy na rozmanitých příkladech funkcí. Během vytváření konkrétních příkladů, které měly objasňovat problematiku těchto pojmů, se ovšem ukázal další směr, jímž by se dalo při psaní práce ubírat. Na rozdíl od hledání příkladů pro jednotlivé pojmy, je možno hledat typy funkcí a konstrukcí, které se v těchto příkladech často vyskytují. Tato skutečnost mne vedla k tvorbě kapitoly zvané Konstrukce funkcí. V této kapitole ukazuji vybrané typy funkcí a k jakým typům příkladů se takové funkce vážou. Mnohdy je totiž použití takových funkcí pro různé pojmy podobné. Dále jsou zde popsány transformace, jichž užíváme právě ke konstrukcím funkcí daných vlastností.

Principem, který se snažím v celé práci dodržovat, je ukazovat jednotlivé vlastnosti funkcí na příkladech a protipříkladech uvedených zpravidla podle obtížnosti. Při formulacích zadání se ovšem poněkud odlišuji od dnes používaných učebnic matematické analýzy, neboť požaduji konstrukci funkce se zadanými vlastnostmi na rozdíl od ověřování vlastností funkcí již zadaných, ať už algoritmického nebo myšlenkově hlubšího. Tuto formu zadání volím proto, že je podle mého názoru didakticky důležité pracovat s různými typy zadání a hledání řešení, abychom s studentů dosáhli lepšího pochopení pojmů.

Technicky probíhala tvorba mé práce z několika kroků. Prvním bylo sepsání, případně vhodné upravení definic zkoumaných pojmů. Druhým potom nalezení vhodných příkladů k prezentaci jejich málo známých a antiintuitivních vlastností. V těchto krocích jsem často používal studijní literatury pro získání formálně přesných definic a inspiraci k tvorbě příkladů. Posledním krokem potom byla konstrukce obecnějších postupů na základě poznatků získaných v předchozích fázích. Jelikož mnohé z funkcí jsou jen těžko představitelné, snažil jsem se ke všem obtížnějším, za pomoci softwaru Mathematica, přiřadit jejich graf.

Svým zaměřením je tedy má práce určena pro začínající vysokoškolské studenty, pro které je důležité zpřesňování zmíněných elementárních pojmů, ale z metodických důvodů také pro učitele i budoucí učitele.

Práci by bylo možno rozšířit dvěma směry. Prvním je možnost rozšíření kapitoly Konstrukce funkcí například o vymezení dalších typů funkcí a jejich použití při procvičování pojmů matematické analýzy. Druhým směrem by potom mohlo být uvádění dalších vlastností funkcí (např. hromadné body, derivace, stejnoměrná konvergence) a příkladů na zpřesňování představ o daných pojmech.

Literatura

[ZMA] Veselý, Jiří. *Základy matematické analýzy : první díl.* Praha : Matfyzpress, 2004. 264 s. ISBN 80-86732-29-0.

[DI] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* Vydání 6. nezměněné. Praha : Academia, 1974. 392 s. ISBN 21-101-74.

[DII] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet II.* Vydání 3. doplněné. Praha : Academia, 1976. 672 s. ISBN 21-059-76.

[VÚZMA] Zajíček, Luděk. *Vybrané úlohy z matematické analýzy : pro 1. a 2. ročník.* Praha : Matfyzpress, 2005. 93 s. ISBN 80-86732-58-4.